Solucionário de
Álgebra linear

1 Matrizes

Questão 1

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Então, temos:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 4 - 2 \times 2 & 1 \times 2 - 2 \times 1 \\ 3 \times 4 - 6 \times 2 & 3 \times 2 - 6 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.1 + 2.3 & 4.(-2) + 2.(-6) \\ 2.1 + 3.1 & 2.(-2) + 1.(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -20 \\ 5 & -10 \end{bmatrix} \quad \text{OK}$$

Questão 2

Temos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2},$$

onde $B^2 = A$. Assim, $B_{m\times m} \times B_{m\times m} = A_{2\times 2} \rightarrow m = 2$ e $n = 2$. Com isso,

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow B^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 + bc = 3 \\ \left.\begin{aligned} ab + bd = -2 \rightarrow b(a+d) = -2 \leftrightarrow (a+d) = \frac{-2}{b} \\ ca + dc = -4 \rightarrow c(a+d) = -4 \leftrightarrow (a+d) = \frac{-4}{c} \end{aligned}\right\} \frac{-2}{b} = \frac{-4}{c} \leftrightarrow \boxed{2b = c} \\ cb + d^2 = 3 \end{cases}$$

Substituindo $2b = c$:

$$\left.\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 3 \leftrightarrow 2b^2 = 3 - a^2 \\ ab + bd = -2 \\ ca + dc = -4 \\ 2b^2 + d^2 = 3 \leftrightarrow 2b^2 = 3 - d^2 \end{cases}\right\} 3 - a^2 = 3 - d^2 \leftrightarrow a^2 = d^2 \leftrightarrow a = \pm d$$

Se $a = -d$:

$$a.b + b.d = -2 \leftrightarrow -db + bd = -2 \leftrightarrow 0 = -2 \quad \text{absurdo!}$$

Então $\boxed{a = d}$, já que $db + bd = -2 \leftrightarrow bd = -1$. Assim, usando $a = b$ e $2b = c$, temos:

$$ab + ab = -2 \leftrightarrow ab = -1 \leftrightarrow \boxed{b = \frac{-1}{a}} \rightarrow \boxed{c = \frac{-2}{a}}$$

A matriz se torna, então:

$$B = \begin{bmatrix} a & \frac{-1}{a} \\ \frac{-2}{a} & a \end{bmatrix} \rightarrow B^2 = \begin{bmatrix} a & \frac{-1}{a} \\ \frac{-2}{a} & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{-1}{a} \\ \frac{-2}{a} & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Fazendo a multiplicação da primeira linha com a primeira coluna das matrizes anteriores, temos:

$$a^2 + \frac{2}{a^2} = 3 \xrightarrow{x = a^2} x + \frac{2}{x} = 3 \leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \leftrightarrow a^2 = 2 \leftrightarrow \boxed{a = \pm\sqrt{2}} \\ x_2 = 1 \leftrightarrow a^2 = 1 \leftrightarrow \boxed{a = \pm 1} \end{cases}$$

Então, há 4 possíveis valores para a e, portanto, 4 possíveis matrizes B:

- $a = \sqrt{2}$:

$$B_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

- $a = -\sqrt{2}$:

$$B_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

- $a = 1$:

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- $a = -1$:

$$B_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Questão 3

Temos, que $A \neq 0$ e $AB = AC$, com A, B e C com multiplicação definida.

a) Para saber de $B = C$, temos:

$$A_{m\times n}B_{a\times b} = A_{m\times n}C_{c\times d}$$

Sabe-se que $A_{m\times n}B_{a\times b} = M_{m\times b}$, então $n = a$; e que $A_{m\times n}C_{c\times d} = M_{m\times d}$, então $n = c$. Como $M_{m\times b} = M_{m\times d}$, então $b = d$; e como $n = a$ e $n = c$, então $a = c$. Por fim: $A_{m\times n}B_{n\times b} = A_{m\times n}C_{n\times b} \leftrightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)B \leftrightarrow IB = IB$, então $B = C$.

b) Sabe-se que a matriz identidade tem a forma $I_{n\times n}$. Então, $Y_{n\times m}A_{m\times n} = I_{n\times n}$. Assim:

$$AB = AC \leftrightarrow A_{m\times n}B_{a\times b} = A_{m\times n}C_{c\times d} \leftrightarrow$$
$$Y_{n\times m}A_{m\times n}B_{a\times b} = Y_{n\times m}A_{m\times n}C_{c\times d} \leftrightarrow \underbrace{\underbrace{I_{n\times n}B_{a\times b}}_{M_{n\times b}} = \underbrace{I_{n\times n}C_{c\times d}}_{M_{n\times d}}}_{b=d,\quad n=a=c}$$

Assim:

$$YAB = YAC \leftrightarrow IB = IC \leftrightarrow B = C$$

Questão 4

A e B são comutativas se $AB = BA$. Para que $M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ seja comutativa com $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, devemos ter que:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x.1 + y.0 = 1.x + 1.z \leftrightarrow x = x + z \leftrightarrow z = 0 \\ z.1 + w.0 = 0.x + 1.z \leftrightarrow z = z \\ x.1 + y.1 = 1.y + 1.w \leftrightarrow x + y = y + w \leftrightarrow x = w \\ z.1 + w.1 = 0.y + 1.w \leftrightarrow z + w = w \leftrightarrow z = 0 \end{cases}$$

Então M, para obedecer ao sistema acima, deve ser da forma:

$$\boxed{M = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}}$$

Questão 5

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

a) $A^2 = AA = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 2 \times 3 & 2 \times 2 + 2 \times (-1) \\ 3 \times 2 - 1 \times 3 & 3 \times 2 - 1 \times (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

$$A^3 = AA^2 = A^2A \Rightarrow$$

$$A^2A = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \times 2 + 2 \times 3 & 10 \times 2 - 2 \times 1 \\ 3 \times 2 + 7 \times 3 & 3 \times 2 - 7 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 18 \\ 27 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AA^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 10 + 2 \times 3 & 2 \times 2 + 2 \times 7 \\ 3 \times 10 - 1 \times 3 & 3 \times 2 - 7 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 18 \\ 27 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, $A^3 = \begin{bmatrix} 26 & 18 \\ 27 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $f(A) = \begin{bmatrix} 26 & 18 \\ 27 & -1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + 4 \leftrightarrow f(A) = \begin{bmatrix} -30 & -6 \\ -9 & -21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} + 4 \leftrightarrow f(A) = \begin{bmatrix} -8 & 8 \\ 12 & -20 \end{bmatrix} + 4$

c) $g(A) = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - 8 \leftrightarrow g(A) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} - 8$

Questão 6

Escalonar as seguintes matrizes:

a)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \mid \div 2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow^{+} \\ \lrcorner_{\times(-6)} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix}2&0&-2&0\\0&2&-1&0\end{bmatrix}\begin{matrix}|\div 2\\|\div 2\end{matrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&-1/2&0\end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix}2&1&5\\1&-3&6\end{bmatrix}\begin{matrix}|\div 2\\ \end{matrix}=\begin{bmatrix}1&1/2&5/2\\1&-3&6\end{bmatrix}\begin{matrix}+\\ \times(-1)\end{matrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&1/2&5/2\\0&7/2&-7/2\end{bmatrix}\begin{matrix}|\times 2\\|\times 2\end{matrix}=\begin{bmatrix}2&1&5\\0&7&-7\end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix}1&2&1&0\\-1&0&3&5\\1&-2&1&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\times(-1)\\+\\+\end{matrix}=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&4&6\\0&-3&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}|\div 2\\ \\ \\ \end{matrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1/2&2&3\\0&-3&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&-3&0&0\\0&1/2&2&3\end{bmatrix}\begin{matrix}\\|\div -3\\ \\ \end{matrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&0\\0&1/2&2&3\end{bmatrix}\begin{matrix}+\\ \div(-2)\quad\times(-2)\\+\end{matrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&2&3\end{bmatrix}$$

e)

$$\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&4&2\\1&-5&1\\4&16&8\end{bmatrix}\begin{matrix}|\div 2\\ \\ \\ \\ \end{matrix}=\begin{bmatrix}1&-1/2&3/2\\1&4&2\\1&-5&1\\4&16&8\end{bmatrix}\begin{matrix}\times(-1)\quad\times(-1)\quad\times(-4)\\+\\+\\+\end{matrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&-1/2&3/2\\0&3&1\\0&-6&0\\0&12&4\end{bmatrix}\begin{matrix}+\\ \times 2\quad\times(-4)\quad\div 6\\+\\+\end{matrix}=\begin{bmatrix}1&0&5/3\\0&3&1\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

f)

$$\begin{bmatrix}0&2&0&2\\1&1&0&3\\3&-4&0&2\\2&-3&0&1\end{bmatrix}\begin{matrix}|\div 2\\ \\ \\ \\ \end{matrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&1&0&3\\3&-4&0&2\\2&-3&0&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-3)\quad\times(-2)\\+\\+\end{matrix}=$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Questão 7

$A_{m\times m}$ e $B_{m\times m}$, em que A é invertível. Mostrar, por indução, que $(ABA^{-1})^n = AB^nA^{-1}\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Supõe-se que $(ABA^{-1})^n = AB^nA^{-1}$ é verdadeiro. Então:

- P/ $n = 1$: $(ABA^{-1})^1 = AB^1A^{-1} = ABA^{-1}$;
- P/ $n = 2$: $(ABA^{-1})^2 = (ABA^{-1})(ABA^{-1}) = AB(A^{-1}A)BA^{-1} = ABIBA^{-1} = AB^2A^{-1}$;

Supõe-se que para $n = k$, a afirmativa é verdadeira. Então $(ABA^{-1})^k = AB^kA^{-1}$ é correto.

Questão 8

Temos, por definição:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} = 1-1 & a_{12} = 1-2 & a_{13} = 1-3 \\ a_{21} = 2-1 & a_{22} = 2-2 & a_{23} = 2-3 \\ a_{31} = 3-1 & a_{32} = 3-2 & a_{33} = 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Questão 9

Resp.: $a_{12} = 4$; $a_{13} = 2$; $a_{23} = -4$;

Questão 10

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix};\ A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Como $S = A + A^t = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 12 \\ 9 & 14 & 7 \\ 12 & 7 & 4 \end{bmatrix}$, a matriz S é simétrica.

b) Como $P = A - A^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & -5 \\ -6 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, a matriz P é anti-simétrica.

2 Determinantes

Questão 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) $\det A + \det A = (1 \times 0 - 2 \times 1) + (3 \times 1 - 0 \times (-1)) = -2 + 3 = 1$

b) $\det(A + B) = \begin{vmatrix} 1+3 & 2-1 \\ 1+0 & 0+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$

Questão 2

A e B $n \times n$

a) $\det(AB) = \det A \times \det B$ e $\det(BA) = \det B \times \det A$. Como $\det A \times \det B = \det B \times \det A$, então $\det(AB) = \det(BA)$. (afirmativa verdadeira)

b) (afirmativa verdadeira)

c) Sabe-se que $\det(xA) = x^n \det A$, n sendo a dimensão da matriz A. Assim, $\det(2A) = 2^n \det A \neq 2 \det A$ p/ $n \neq 1$. (afirmativa falsa)

d) $\det(A^2) = \det(AA) = \det A \times \det A = (\det A)^2$. (afirmativa verdadeira)

Questão 3

Cofatores:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

a)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & \mathbf{0} \\ 0 & 2 & 0 & \mathbf{1} \\ 2 & 0 & -1 & \mathbf{3} \\ 1 & 1 & 2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a_{14}c_{14} + a_{24}c_{24} + a_{34}c_{34} + a_{44}c_{44}$$

$$c_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(11 + 7) = 18$$

$$c_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1(12 - 10) = -2$$

$$\det A = 0.c_{14} + 1.18 + 3.(-2) + 0.c_{44} = 18 - 6 = \boxed{12}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} i & 3 & 2 & \mathbf{-i} \\ 3 & -i & 1 & \mathbf{1} \\ 2 & 1 & -1 & \mathbf{0} \\ -i & i & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a_{14}c_{14} + a_{24}c_{24} + a_{34}c_{34} + a_{44}c_{44}$$

$$c_{14} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 3 & -i & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -i & i & 0 \end{vmatrix} = (2i - i^2 + i + 3i) = -1(6i + 1) = -6i - 1$$

$$c_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} i & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -i & i & 0 \end{vmatrix} = 1(7i + 2i + i^2) = 9i - 1$$

$$c_{44} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} i & 3 & 2 \\ 3 & -i & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(12 + i^2 + 9 + 4i - 1) = 20 + 3i$$

$$\det A = -i(-6i - 1) + i.(9i - 1) + 0.c_{34} + 1.(20 + 3i) = \boxed{5 + 3i}$$

Questão 4

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} + a_{14}c_{14}$$

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$\det A = a_{11}c_{11} + 0.c_{12} + 0.c_{13} + 0.c_{14} = a_{11} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

Questão 5

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c^2-a^2)\check{}(c-a)(b^2-a^2) =$$

$$= (b-a)(c-a)(c+a) - (c-a)(b-a)(b+a) = (b-a)(c-a)(c+a-b-a) =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b) = (-1)(a-b)(c-a)(-1)(b-c) = \boxed{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

Questão 6

Itens:

a) Se A é invertível, então temos que $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$. Como $\det A = 1$, então $A^{-1} = \operatorname{adj} A$. $\operatorname{adj} A$ é a matriz transposta dos cofatores de A. Ou seja, sendo C a matriz dos cofatores de A, $\operatorname{adj} A = C^t$. Como $\det A = 1$, $C = A$, então $\operatorname{adj} A = A^t$. Da mesma forma, como $\det A = 1$, $A^t = A$. Portanto, $\operatorname{adj} A = A$. Desta forma, temos que $A^{-1} = A$.

b) Se A é invertível, então temos que $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$. A é matriz triangular superior, ou seja $A = (a_{ij})$ e $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$. $\operatorname{adj} A$ a matriz transposta dos cofatores de A. Ou seja, sendo C a matriz dos cofatores de A, $\operatorname{adj} A = C^t$. Como A é matriz triangular superior, $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$, e C^t é matriz triangular superior, $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$. Desta forma, A^{-1} também é matriz triangular superior. A afirmativa é verdadeira!

c) Sendo $A = \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$, $k_1 = k_2 = k_3 = \cdots = k_n = k$. Temos que $\det A =$ $k_1(-1)^{1+1} \times k_2(-1)^{1+1} \times k_3(-1)^{1+1} \times \cdots \times k_{n-2}(-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_n \end{vmatrix} = k_1 \times k_2 \times k_3 \times \cdots \times k_{n-2} \times k_n^2 = k \times k \times k \times \cdots \times k \times k^2 = k^{n-2} \times k^2 = k^n$

d) Sendo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, uma matriz triangular superior. Temos que $\det A =$ $a_{11}.(-1)^{1+1} \times a_{22}.(-1)^{2+2} \times \cdots \times a_{(n-2)(n-2)}.(-1)^{n-2+n-2} \times \begin{bmatrix} a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & a_{nn} \end{bmatrix} =$ $a_{11} \times a_{22} \times a_{33} \times \cdots \times a_{(n-2)(n-2)} \times a_{(n-1)(n-1)} \times a_{nn}$. A prova é análoga para uma matriz triangular inferior. A afirmativa é falsa!

Questão 7

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+2)^2 & (a+4)^2 \\ (a+2)^2 & (a+4)^2 & (a+6)^2 \\ (a+4)^2 & (a+6)^2 & (a+8)^2 \end{vmatrix} = -2^9$$

Questão 8

$$\begin{vmatrix} \cos(2a) & \cos^2(a) & \sin^2(a) \\ \cos(2b) & \cos^2(b) & \sin^2(b) \\ \cos(2c) & \cos^2(c) & \sin^2(c) \end{vmatrix} = 0$$

Questão 9

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{n} & \frac{b}{n} \\ -\frac{c}{n} & \frac{a}{n} \end{bmatrix}$$

onde $n = a \times d - b \times c$.

3 Sistemas Lineares

Questão 1

Itens:

a) $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^3 - 3k + 2 = k^3 - 3k + 3 - 1 = (k^3 - 1) + 3(1 - k) =$$

$$= (k-1)(k^2 + k + 1) - 3(k-1) = (k^2 + k + 1 - 3)(k-1) =$$
$$= (k^2 + k - 2)(k-1) = (k+2)(k-1)^2$$

- P/ $k = 1$

$$D = D_x = D_y = D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Sistema Possível e Indeterminado.}$$

- P/ $k = -2$

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \\ D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 9 \\ D_y = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 9 \\ D_z = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \end{cases}$$

Sistema Impossível.

- P/ $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 1, -2$
  Sistema Possível e Determinado.

b) $\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 9k - 8k + 3 - 6 = k - 3$$

- P/ $k = 3$ P/ $k = -2$

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = 3 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

  Sistema Possível e Indeterminado.
- P/ $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 3$
  Sistema Possível e Determinado.

Questão 2

Itens:

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + 7z = 0 \\ 3x - 2y + 8z = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \\ 3 & -2 & 8 & 4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 30 & -9 \end{array}\right] \; | \div 30 \quad = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/10 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -13/10 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/10 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \mathbf{-18/10} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{-1/2} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{-3/10} \end{array}\right]$$

b) $\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 3x + y + 4z = 6 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \times(-3) \quad \times(-1) \\ + \\ + \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \div(-2) \mid \div 4 \\ + \end{array} =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1/2 & -3/2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \Rightarrow \text{Sistema Possível e Indeterminado.}$$

c) $\begin{cases} 2x - y + 5z = 19 \\ x + 5y - 3z = 4 \\ 3x + 2y + 4z = 25 \end{cases} \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 19 \\ 1 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 25 \end{array}\right] \begin{array}{l} \mid \div 2 \quad \div(-2) \quad \div(-0) \\ + \\ + \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{19}{2} \\ 0 & \frac{11}{2} & -\frac{11}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} & \frac{56}{3} \end{array}\right] \mid \div \frac{11}{2} =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} & \frac{56}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ \div(2) \quad \times(-\frac{7}{3}) \\ + \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{14}{3} & 21 \end{array}\right] \mid \div \frac{14}{2} =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 21 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ + \\ \times(-2) \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{7/2} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{9/2} \end{array}\right]$$

d) $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x + 7y + 4z = 0 \\ x + y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \mathbf{0} \\ 2 & 7 & 4 & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & -4 & \mathbf{0} \end{array}\right] \Rightarrow \text{Solução Trivial}$$

Questão 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

a) Fazendo $x = 0$

$$\begin{cases} 2y - w = 2 \\ 2z - w = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w + 2 = 2y \\ w + 2 = 2z \end{cases} \Rightarrow 2y = 2z \Rightarrow y = z$$

$$2y + 2z - w = 4 \Rightarrow 2y + 2y - w = 4 \Rightarrow 4y - w = 4$$

$$4y + 4z - 3w = 8 \Rightarrow 4y + 4y - 3w = 8 \Rightarrow 8y - 3w = 8$$

$$\begin{cases} -12y + 3w = -12 \\ 8y - 3w = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} -4y = -4 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow z = 1 \\ w = 4y - 4 \Rightarrow w = 4 - 4 \Rightarrow w = 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & -3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \times(-1)\ \times(-1)\ \times(-3) \\ + \\ + \\ + \end{array} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ \times(-1) \\ \\ + \end{array} =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ +\ \mid \div(-2) \\ \times(-1)\ \times(-1)\ \times(-1) \mid \div 2 \\ + \end{array} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

c)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \times(-1)\ \times(-1)\ \times(-3) \\ + \\ + \\ + \end{array} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ \times(-1) \\ \\ + \end{array} =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ +\ \mid \div(-2) \\ \times(-1)\ \times(-1)\ \times(-1) \mid \div 2 \\ + \end{array} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

d) Toda matriz-solução obtida em b) é a soma de uma matriz-solução encontrada em c) com a solução particular encontrada em a).

Questão 4

$$\begin{cases} 3x + 5y + 12z - w = -3 \\ x + y + 4z - w = -6 \\ 2y + 2z + w = 5 \end{cases}$$

a)

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 12 & -1 & | & -3 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & | & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \div(-3) \mid \div 3 \\ + \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 4 & -\frac{1}{3} & | & -1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & | & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & 5 \end{bmatrix} \mid \div -\frac{2}{3} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 4 & -\frac{1}{3} & | & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & | & \frac{15}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} + \\ \times(-\frac{5}{3}) \quad \times(-2) \\ + \end{matrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & | & -\frac{27}{2} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & | & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -1 & | & -10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ + \\ \times(-2) \mid \div -2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{13}{2} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & | & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & | & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{13}{2} \\ \frac{15}{2} \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

b)

$$\begin{cases} 3x + 5y + 12z - w = -3 \\ x + y + 4z - w = -6 \\ 2y + 2z + w = 5 \\ 2z + kw = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & 5 & 12 & -1 \\ \mathbf{1} & 1 & 4 & -1 \\ \mathbf{0} & 2 & 2 & 1 \\ \mathbf{0} & 2 & 2 & k \end{vmatrix}$$

$$D = a_{11}c_{11} + a_{21}c_{21} + a_{31}c_{31} + a_{41}c_{41}$$

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & k \end{vmatrix} = 1(2k - 4 - 8k - 2) = -6k - 6$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 12 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & k \end{vmatrix} = -1(10k - 4 - 24k - 10) = 14k + 14$$

$D = 3(-6k - 6) + 1(14k + 14) + 0.c_{31} + 0.c_{41} = -18k - 18 + 14k + 14 = -4k - 4 - 4k - 4 = 0 \Rightarrow k = -1$ (Sistema impossível)

Questão 5

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 - 8x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 13x_3 - 3x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 21x_4 = -2 \\ 3x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & -8 & 1 \\ 1 & 4 & 13 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 21 & -2 \\ 0 & 3 & 8 & 5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \times(-1) \quad \times(-2) \\ + \\ + \\ \end{array} =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & -8 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \times(-1) \quad \times(-1) \quad | \div 3 \\ + \\ + \end{array} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 8/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ \times(-1) \\ \\ \end{array} =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7/3 & -29/3 & 1 \\ 0 & 1 & 8/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \times(-1) \quad \times(-1) \quad | \div 3 \\ + \\ + \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -4/8 \\ -8/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 32/3 \\ 5/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

4 Vetores

Questão 1

Respostas:

a) $(8, 9, 4)$
b) $(-4, 28, 10)$
c) $(10, 22, 9)$
d) $(9, 10, 15)$

5 Operações com vetores

Questão 1

Uma resposta possível: $(0, 1, 2)$, $(-1, 2, -1)$

Questão 2

Respostas:

a) -8
b) -43
c) $1,75$
d) $(9, 10, 15)$

Questão 3

Respostas:

a) $(4, -1, 3)$
b) $(-6, 12, -30)$
c) $(-13, -9, 20)$
d) $(9, 10, 15)$

Questão 4

Assumindo um dos vetores como $(x, 1, 1)$ temos que $x = -1$. Assim temos o outro vetor como $(-4, -5, 1)$, para serem unitários basta dividi-los pelas suas normas. Existem outras soluções dependendo dos valores arbitrários escolhidos como neste casos $(x, 1, 1)$.

Questão 5

$$C = \sqrt{2}$$

Questão 6

$$m = -4$$

Questão 7

Sendo

Questão 8

$$a = (3, 6, -7)$$

$$b = (3x, y + 2, 21)$$

$$3 \times 3x + 6 \times (y + 2) - 7 \times 21 = 9x + 6y - 135 = 0$$

$$x = \frac{135 - 6y}{9}$$

Sendo $x = 1$, $y = 21$; $b = (3, 23, 21)$.

Questão 9

Respostas:

a) 3

b) $4i + 13j - 10k$; $(4, 13, -10)$

c) -22

d) -118

6 Espaços vetoriais

Questão 1

Usando as operações com matrizes verifica-se para elementos de M(2,2) são fechadas para a soma e multiplicação por escalar e verifica-se as propriedades da soma (associativa, comutativa, elemento neutro, oposto) e multiplicação (distributiva por vetor, distributiva por escalar, associativa, neutro).

Dica: quando necessário use a matriz nula, O onde todos os elementos são nulos, e também a matriz identidade.

Questão 2

Foram definidas as operações de soma e multiplicação por escalar. Agora verifica-se as propriedades da soma e multiplicação.

Dicas:

1. Use as definições das operações. Por exemplo:

$$(r(f + g))(x) = r(f + g)(x) = r(f(x) + g(x)) = rf(x) + rg(x) =$$

$$= (rf)(x) + (rg)(x) = (rf + rg)(x)$$

2. Outra é que você deve usar funções como $N(x) = 0$, $O(x) = -f(x)$ e $I(x) = f^{-1}(x)$;
3. Pode-se usar funções particulares para verificar, como $f(x) = ax$, por exemplo.

7 Combinação linear

Questão 1

Nenhum

Questão 2

Respostas:

a) $E = 2A - B + 2C$

b) Não há solução.

Questão 3

Respostas:

a) $(1.7, -4) = -3\mu + 2\upsilon$;

b) Não há solução;

c) $k = -8$;

d) $(a, b, c) = k(3, -4, 3)$, onde $k \in \mathbb{R}$.

Questão 4

$k = -\frac{19}{3}$

Questão 5

$$(7, 2, 9) = 2(2, 1, 3) + 3(1, 0, 1)$$

Questão 6

$$q(t) = p_1(t) - 3p_2(t) + p_3(t)$$

8 Dependência e Independência Linear

Questão 1

Seja $v = (a, b) \in R^2 ev = (c, d) \in R^2$, temos:

$$x(a, b) + y(c, d) = 0 \Rightarrow (ax + cy, bx + dy) = 0$$

Logo,

$$\begin{cases} ax + cy = 0 \\ bx + dy = 0 \end{cases}$$

Pela Regra de Cramer, temos que:

- $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}$;

- $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}.$

Sabemos que, para eles serem LD, x e y devem aceitar soluções diferentes de 0. Para isso, temos:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \Rightarrow ad - bc = 0$$

Se $ad - bc \neq 0$, a única solução será $x = y = 0$, logo os vetores serão LI.

Questão 2

Sejam os vetores $(3, 1, 0)$ e $(a^2 + 2, 2, 0)$, temos:

$$x(3, 1, 0) + y(a^2 + 2, 2, 0 = 0 \Rightarrow (3x + a^2 + y + 2y, x + 2y, 0) = 0$$

Logo,

$$\begin{cases} 3x + a^2 + y + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Pela Regra de Cramer, temos:

- $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & a^2+2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & a^2+2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{\begin{vmatrix} 3 & a^2+2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}};$
- $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{\begin{vmatrix} 3 & a^2+2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}.$

Logo, para os vetores serem LD, o sistema tem de aceitar soluções diferentes de 0. Então,

$$\begin{vmatrix} 3 & a^2+2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3 \times 2 - 1(a^2 + 2) = 0 \Rightarrow 6 - a^2 - 2 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

Questão 3

Respostas

a) Sejam os polinômios $t^2 - 2t + 3, 2t^2 + t + 8$ e $t^2 + 8t + 7$, temos:

$$x(t^2 - 2t + 3) + y(2t^2 + t + 8) + z(t^2 + 8t + 7) = 0 \Rightarrow$$

$$t^2(x + 2y + z) + t(-2x + y + 8z) + (3x + 8y + 7z) = 0$$

Logo,

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -2x + y + 8z = 0 \\ 3x + 8y + 7z = 0 \end{cases}$$

Pela Regra de Cramer, temos:

- $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 8 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix}};$
- $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix}};$
- $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix}};$

Após os cálculos, encontramos que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 0$, logo há infinitas soluções para esse sistema, o que significa que os polinômios são LD.

b) ______________

Questão 4

Respostas

a) Sejam os vetores $(2, 1, 1)$, $(3, -4, 6)$ e $(4, -9, 11)$, temos:

$$x(2, 1, 1) + y(3, -4, 6) + z(4, -9, 11) = 0 \Rightarrow (2x + 3y + 4z, x - 4y - 9z, x + 6y + 11z) = 0$$

Logo,

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ x - 4y - 9z = 0 \\ x + 6y + 11z = 0 \end{cases}$$

Pela Regra de Cramer, temos:

- $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -9 \\ 0 & 6 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -9 \\ 1 & 6 & 11 \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -9 \\ 1 & 6 & 11 \end{vmatrix}};$
- $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -9 \\ 1 & 0 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -9 \\ 1 & 6 & 11 \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -9 \\ 1 & 6 & 11 \end{vmatrix}};$
- $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -9 \\ 1 & 6 & 11 \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -9 \\ 1 & 6 & 11 \end{vmatrix}};$

Após os cálculos, encontramos que $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -9 \\ 1 & 6 & 11 \end{vmatrix} = 0$, logo há infinitas soluções para esse sistema, o que significa que os vetores são LD.

b) Sejam os vetores $(2, 1)$, $(-1, 3)$ e $(4, 2)$, temos:

$$x(2, 1) + y(-1, 3) + z(4, 2) = 0 \Rightarrow (2x - y + 4z, x + 3y + 2z) = 0$$

Logo,

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -4z \\ x + 3y = -2z \end{cases}$$

Pela Regra de Cramer, temos:

- $x = \dfrac{\begin{vmatrix} -4z & -1 \\ -2z & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{7} = -2z;$

- $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -4z \\ 1 & -2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{7} = 0.$

c) Sejam os vetores $(1, 0, 2, 4)$, $(0, 1, 9, 2)$ e $(-5, 2, 8, -16)$, temos:

$$x(1, 0, 2, 4) + y(0, 1, 9, 2) + z(-5, 2, 8, -16) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - 5z, y + 2z, 2x + 9y + 8z, 4x + 2y - 16z) = 0$$

$$\begin{cases} x - 5z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 2x + 9y + 8z = 0 \\ 4x + 2y - 16z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5z \\ y = -2z \end{cases}$$

Logo, há infinitas soluções (x, y, z), tal que $x = 5z$ e $y = -2z$.

d) Sejam os vetores $(1, 4)$, $(3, -1)$ e $(2, 5)$, temos:

$$x(1, 4) + y(3, -1) + z(2, 5) = 0 \Rightarrow (x + 3y + 2z, 4x - y + 5z) = 0$$

Logo,

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 4x - y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = -2z \\ 4x - y = -5z \end{cases}$$

Pela Regra de Cramer, temos:

- $x = \dfrac{\begin{vmatrix} -2z & 3 \\ -5z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}} = -\dfrac{17z}{13};$
- $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2z \\ 4 & -5z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}} = -\dfrac{3z}{13}.$

Logo, há infinitas soluções (x, y, z) tal que $x = -17z/13$ e $y = -3z/13$.

Questão 5

Sejam os vetores $(1, 2x, -x^2)$, $(2, -x, 3x^2)$ e $(3, -4x, 7x^2)$, temos:

$$a(1, 2x, -x^2) + b(2, -x, 3x^2) + c(3, -4x, 7x^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a + 2b + 3c, 2xa - xb - 4xc, -x^2a + 3x^2b + 7x^2c) = 0$$

Logo,

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ 2xa - xb - 4xc = 0 \\ -x^2a + 3x^2b + 7x^2c = 0 \end{cases}$$

Pela Regra de Cramer, temos:

- $a = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -x & -4x \\ 0 & 3x^2 & 7x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2x & -x & -4x \\ -x^2 & 3x^2 & 7x^2 \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2x & -x & -4x \\ -x^2 & 3x^2 & 7x^2 \end{vmatrix}} = 0;$
- $b = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2x & 0 & -4x \\ -x^2 & 0 & 7x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2x & -x & -4x \\ -x^2 & 3x^2 & 7x^2 \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2x & -x & -4x \\ -x^2 & 3x^2 & 7x^2 \end{vmatrix}} = 0;$
- $c = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2x & -x & 0 \\ -x^2 & 3x^2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2x & -x & -4x \\ -x^2 & 3x^2 & 7x^2 \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2x & -x & -4x \\ -x^2 & 3x^2 & 7x^2 \end{vmatrix}} = 0;$

Após os cálculos, encontramos que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2x & -x & -4x \\ -x^2 & 3x^2 & 7x^2 \end{vmatrix} = 0$, então o sistema possui infinitas soluções e os vetores são LD.

Questão 6

Temos:

$$a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 = 0$$

Substituindo pelas combinações dos x's e agrupando os termos:

$$(a_1 + a_3)x_1 + (a_1 + a_2)x_2 + (a_2 + a_3)x_3 = 0$$

Sabendo que $\{x_1, x_2, x_3\}$ é L.I.:

$$a_1 + a_3 = 0$$

$$a_1 + a_2 = 0$$

$$a_2 + a_3 = 0$$

Tendo como única solução $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Portanto $\{y_1, y_2, y_3\}$ é L.I.

Questão 7

Temos que v_1 e v_2 são L.D. $\Leftrightarrow v_1 = cv_2$

($\rightarrow$) (Provando a ida) $a_1v_1 + a_2v_2 = 0$; admitindo soluções além da trivial. Se $a_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 = \frac{-a_2}{a_1}v_2$. Se $a_2 \neq 0 \Rightarrow v_2 = \frac{-a_1}{a_2}v_1$.

($\leftarrow$) (Provando a volta)

$$v_1 = cv_2$$

Então:

$$a_1v_1 + a_2v_2 = 0$$

$$a_1cv_2 + a_2v_2 = 0$$

$(a_1c + a_2)v_2 = 0$; como v_2 pode ser diferente de zero:
$a_1c + a_2 = 0$; portanto para valores arbitrários de a_1 e a_2 basta fazermos $c = \frac{-a_2}{a_1}$ que dessa forma haverá soluções além da trivial.